Finansijska matematika 1

PMF, Podgorica

Zimski semestar 2019-20

Prva nedjelja

Struktura kursa

Prvi dio semestra

- Kamatni račun, novčani tokovi, vraćanje zajma...
- Garrett, Stephen. *An introduction to the mathematics of finance: a deterministic approach.* (2013)

Drugi dio semestra

- Finansijski model s jednim periodom i konačnim brojem stanja: valuation of contigent claims, complete markets, optimal portfolios, optimal consumption, optimal investment...
- Pliska, Stanley. *Introduction to mathematical finance.* (1997)

Kolokvijum 40 + Završni ispit 40 + projekat 20

Neki osnovni pojmovi

Kapital / Glavnica / Uložena suma

Pozajmljeni ili uložani novac.

Investitor / Kreditor / Povjerilac

Osoba ili pravno lice koje pozajmljuje ili ulaže novac.

Kamata / Interes

Trošak pozajmljivanja novca.
Nagrada za ulaganja novca.

Premija rizika

Povećanje kamate/dodatna kamata zbog prisustva rizika ne vraćanja novca.

Prosti interesni račun

Kamata se obračunava samo na glavnicu (a ne na zbir glavnice i kamate).

- C - kapital
- $i \geq 0$ - godišnja kamatna stopa (u procentima)
- $A_0 = C$, $A_1 = C + iC = C(1+i)$, $A_2 = A_1 + iC$, ...
- $A_n = A_{n-1} + iC = C(1+in)$, $n \in \mathbb{N}$
- S obzirom da se kamata obračunava na kraju obračunskog perioda (u ovom slučaju godine) kažemo da se kamata obračunava *dekurzivno*.

$$C(1+ni)$$

U opštem slučaju je $n \in \mathbb{R}^+$, npr. poslije m mjeseci je $C(1 + \frac{m}{12} i)$

Prosti interesni račun

- U praksi, prost obračun kamate vodi do anomalija na tržištu (primjer na kraju predavanja).
- U praksi se koristi za kratkoročne zajmove (manje od godinu, $t \leq 1$).
- U praksi se prosti interes često računa *anticipativno*:
  - Investititor ulaže $X(1 - td)$
  - Po isteku perioda t bude mu isplaćeno X
  - $d \geq 0$ - (godišnja) diskontna stopa
- Koja je veza između i i d?

Primjer: uvod

Hartija od vrijednosti

Dokument kojim se obećava isplata novca (pod određenim uslovima).
Izdaju ga države, banke, kompanije...

Blagajnički zapis / Treasury Bill / T-Bill

Diskontna, *kratkoročna* hartija od vrijednosti koju izdaje (centralna) banka obavezujući se da će vlasniku zapisa u po isteku *roka dospijeća* isplatiti *nominalnu vrijednost*.

- Nominalna vrijednost: vrijednost naznačena na blagajničkom zapisu
- Diskontna hartija od vrijednosti: prodaje se po cijeni koja manja od nominalne vrijednosti
- Kratkoročna hartija od vrijednosti: $t \leq 1$
- Rok dospijeća: naznačeno vrijeme kada se vrši isplata

Primjer: nastavak

Cijena blagajničkog zapisa

$$P = X(1 - dt)$$

- X je nominalna vrijednost
- d je diskontna stopa
- t je rok dospijeća

Primjer

Price of a 30-day £2,000 treasury bill issued by the government at a simple rate of discount of 5% per annum:

$$2000 \cdot \left(1 - \frac{30}{365} \cdot 0.05\right) = 1991.78$$

Složeni interesni račun

Kamata se obračunava na zbir glavnice i kamate.

- $i \geq 0$ - godišnja kamatna stopa (u procentima)
- $A_0 = C$
- $A_1 = A_0 + iA_0 = C(1+i)$,
- $A_2 = A_1 + iA_1 = C(1+i)^2$, ...
- $A_n = A_{n-1} + iA_{n-1} = C(1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$
- S obzirom da se kamata obračunava na kraju obračunskog perioda (u ovom slučaju godine) kažemo da se kamata obračunava *dekurzivno*.

$$C(1+i)^n$$

Složeni interesni račun

U opštem slučaju je $t \in \mathbb{R}^+$.

$$C(1+i)^t$$

Investitor koji ima pristup dvama računima sa istom kamatnom stopom i koja se obračunava složenim interesnim računom ne zarađuje premještanjem novca između računa:

$$\left(C(1+i)^{t_1}\right)(1+i)^{t_2} = C(1+i)^{t_1+t_2}$$

Tejlorova aproksimacija

Prosta kamata se može interpretirati kao Tejlorova aproksimacija složene kamate.

$$
\begin{aligned}
f(i) &= (1+i)^t, \quad f(0) = 1 \\
f'(i) &= t(1+i)^{t-1}, \quad f'(0) = 0 \\
f(i) &= f(0) + \frac{i f'(0)}{1!} + o(i^2) \\
(1+i)^t &= 1 + it + o(i^2)
\end{aligned}
$$

Arbitraža u finansijama

Arbitraža u praksi

Mogućnost zarade iskorištavanjem različitih cijena iste robe na različitim tržistima (kupovinom po nižoj, a prodajom po višoj cijeni).

Arbitraža u teoriji matematike finansija

Mogućnost zarade bez rizika.

- Važan koncept.
- Više verzija i preciznih definicija.
- Često se pretpostavlja da arbitraža ne postoji.
- Biše o arbitraži u drugom dijelu kursa.

Primjer: Arbitraža sa prostim kamaćenjem?

Investitor koji ima C novca ima priliku da ulaže i podiže novac po kamatnoj stopi i koja se obračunava prostim interesnim računom.

Ulaganje na godinu dana

Stanje na računu nakon godinu dana: $C(1+i)$

Uzastopna ulaganja na pola godine

$C \longrightarrow C(1+\frac{i}{2}) \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{2})\Big)(1+\frac{i}{2})$
Stanje na računu nakon godinu dana:
$C(1+\frac{i}{2})^2 = C(1+i+\frac{i^2}{4}) > C(1+i)$.

Primjer: Arbitraža sa prostim kamaćenjem?

Nastavak

Uzastopna mjesečna ulaganja

$C \longrightarrow C(1+\frac{i}{12}) \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{12})\Big)(1+\frac{i}{12}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Big(C(1+\frac{i}{12})^{11}\Big)(1+\frac{i}{12})$

Stanje na računu nakon godinu dana:
$C(1+\frac{i}{12})^{12} > C(1+\frac{i}{2})^2 > C(1+i)$.

Uzastopnih n ulaganja na svakih $\frac{1}{n}$ godine

Stanje na računu nakon godinu dana: $C(1+\frac{i}{n})^n$
Kad $n \to \infty$ stanje na računu:

$$Ce^i > C(1+\frac{i}{n})^n.$$

Prost interesni račun vodi arbitraži?

O pretpostavkama

- Konstantna kamata?
- Kamata koja ne zavisi od glavnice C?
- Nema neizvjesnosti: sve je determinističko?

Druga nedjelja

Promjenljiva kamatna stopa

- Kamatna stopa (godišnja) koja zavisi od trenutka t
- Sa $i(t)$ je (efektivna) kamatna stopa za period od t do $t+1$
- Pretpostavljamo da $i(t)$ ne zavisi od veličine kapitala
- Kapital C se u periodu od t do $t+1$ akumulira na $C(1+i(t))$
- Kapital C se u periodu od t do $t+n$ akumulira na:

$$C(1+i(t))(1+i(t+1))(1+i(t+2))\dots(1+i(t+n-1))$$

- Libor, euribor

Nominalna kamatna stopa

Definicija

Ako je efektivna kamatna stopa za period od t do $t+h$, $h>0$, jednaka $hi_h(t)$ onda $i_h(t)$ nazivamo *nominalnom (godišnjom) kamatnom stopom*.

- Kapital C uložen u trenutku t po nominalnoj kapatnoj stopi $i_h(t)$ nakon perioda dužine h se akumulira na $C(1+hi_h(t))$
- Ako je $h=1$ onda se nominalna i efektiva godišnja kamatna stopa poklapaju: $i_1(t)=i(t)$
- Ako nominalna kamatna stopa ne zavisi od trenutka pišemo $i_h(t)=i_h$
- Ako je $h=\frac{1}{p}$ koristimo oznaku $i_{\frac{1}{p}}(t)=i^{(p)}(t)$
- Primjer?

Akumulacioni faktori

Neka je $t_1 \leq t_2$

$A(t_1, t_2)$

Ako je u trenutku t_1 ulozena vrijednost 1 $A(t_1, t_2)$ je akumuliarana vrijednost u trenutku t_2.

- C u trenutku $t_1 \longrightarrow CA(t_1, t_2)$ u trenutku t_2
- Definišemo $A(t, t) = 1$ za svako $t \in \mathbb{R}$
- Po definiciji i_h, A: $A(t, t+h) = 1 + hi_h(t)$

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}$$

Princip konzistencije

Consistency principle

Princip konzistencije

Za proizvoljna tri trenutka $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ važi:

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$$

- No arbitrage?
- Teorijski važan princip
- Ne važi (u potpunosti) u praksi

Primjer

Ako je $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_1 - t_2)}$, $\delta \in \mathbb{R}$, zadovoljen je princip konzistencije.
Tabla.

Definicija

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} i_h(t)$$

"Trenutna nominalna kamatna stopa"

Na osnovu veze između i_h i A imamo:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{A(t, t+h) - A(t, t)}{h} = \Big(A(t_1, t_2)\Big)'_2 \Big|_{(t_1, t_2) = (t, t)}$$

Reprezentacija akumulacionog faktora

Teorema

Ako su $\delta(t)$ i $A(t_0, t)$ neprekidne funkcije po t i važi princip kozistencije onda je:

$$A(t_1, t_2) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt\right)$$

Dokaz na tabli.

Posljedica

Ako je poznat intenzitet kamate $\delta(t)$ onda je:

$$i_h(t) = \frac{\exp\left(\int_t^{t+h} \delta(t)\, dt\right) - 1}{h}$$

- A i i_h se mogu definisati preko δ!
- Relaksiranje uslova: neprekidnost $\rightarrow$ neprekidnost dio po dio.

Konstantan intenzitet kamate

Neka je $\delta(t) = \delta$ konstantno.

- $A(t_1, t_2) = e^{\delta(t_1 - t_2)}$ (kao u primjeru!)
- Za proizvoljno t, n je $A(t, t+n) = e^{\delta n}$.
- Kamatna stopa je konstantna: $i = i_1 = e^{\delta} - 1$ (zbog posljedice s prethodnog slajda)
- Obračun kamate u *proizvoljnom trenutku* $n \in \mathbb{R}^+$:

$$A(t_0, t_0 + n) = (1+i)^n$$

Primjer

$\delta(t) = a + bt$ i $\delta(t) = a \cdot b^t$
Sami.

Intenzitet kamate kao logaritamski izvod

Fiksiramo trenutak t_0

- Definišemo $F(t) = A(t_0, t)$
- Na osnovu teoreme o reprezentaciji akumulacionog faktora:

$$\ln F(t) = \int_{t_0}^{t} \delta(s)\, ds$$

- Nakon "diferenciranja jednakosti":

$$\delta(t) = \frac{F'(t)}{F(t)}$$

Sadašnje vrijednosti

Uvod

- $t_1 \leq t_2$
- $C_2 = C_1 A(t_1, t_2)$
- $C_1 = C_2 / A(t_1, t_2) = C_2 \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt\right)$

Definicija

Diskontovana vrijednost u trenutku t_1 kapitala C sa rokom dospijeća t_2 je:

$$C \exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt\right)$$

Ako je $t_1 = 0$ diskontovanu vrijednost nazivamo *sadašnja vrijednost*.

$$C \exp\left(-\int_{0}^{t} \delta(s)\,ds\right)$$

Funkcija sadašnje vrijednosti

Definišemo:

$$v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(s)\,ds\right)$$

- Ako je $t \geq 0$ onda je $v(t)$ sadašnja vrijednost kapitala vrijednosti 1 sa rokom dospijeća t
- Ako je $t < 0$ onda je $v(t)$ akumulacija kapitala vrijednost 1 od trenutka t do trenutka 0.
- Sadašnja vrijednost kaptala C sa rokom dospijeća $t > 0$ je $Cv(t)$
- Ako je $\delta(t) = \delta$ konstantno onda je $v(t)v^t$ gdje je $v = v(1) = e^{-\delta}$